

Matematika II - 4. cvičení

Řešení Příkladu 4:

$$f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z; M = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$$

Množina $M \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná, omezená (např. $M \subset \mathbf{B}([0, 0, 0], 2)$) a uzavřená, a tedy (neprázdná) kompaktní. Uzavřenost množiny M plyne z toho, že M lze zapsat jako průnik tří uzavřených množin:

$$\begin{aligned} M &= \left([-1, 1] \times \mathbb{R}^2\right) \cap (\mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}^2 \times [-1, 1]) = \\ &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \in [-1, 1]\} \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; y \in [-1, 1]\} \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že uzavřenost tří množin z předchozího řádku plyne z **Příkladu 7** ze Supersemináře. Jelikož f je spojitá funkce na neprázdné kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^3$ (f je spojitá dokonce na $\mathbb{R}^3$), nabývá na M svého maxima i minima (vzhledem k M).

Všimněme si, že pro $z \in (-1, 1)$ a $x, y \in [-1, 1]$ platí

$$f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 1).$$

Odtud plyne, že hledané body maxima musí být tvaru $[x, y, 1]$ a body minima musí být tvaru $[x, y, -1]$.

Nejprve budeme hledat body maxima a pro $x, y \in [-1, 1]$ definujeme

$$g(x, y) = f(x, y, 1) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Po úpravě výše je zřejmé, že funkce g nabývá maxima na $[-1, 1] \times [-1, 1]$ v bodech $[1, 1]$, $[1, -1]$, $[-1, 1]$ a $[-1, -1]$. Dohromady dostáváme, že funkce f nabývá na M maxima v bodech $[1, 1, 1]$, $[1, -1, 1]$, $[-1, 1, 1]$ a $[-1, -1, 1]$.

Podobně, pokud pro $x, y \in [-1, 1]$ definujeme

$$h(x, y) = f(x, y, -1) = 2x^2 + 2y^2 - 1,$$

nalezneme bod minima funkce f na M pomocí bodu minima funkce h na $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Funkce h má zřejmě jediný bod minima $[0, 0]$, z čehož plyne, že funkce f má jediný bod minima $[0, 0, -1]$.

Řešení Příkladu 6:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}; M = \mathbb{R}^2$$

Množina $M = \mathbb{R}^2$ je v tomto případě neomezená, a tedy nemůže být kompaktní. Přestože funkce f je spojitá, nemáme v tuto chvíli žádnou záruku, že nabývá svého suprema a infima.

Pro $r \in [0, \infty)$ položíme $g(r) = re^r$. Důvodem, proč jsme zvolili funkci g právě takto, je, že nyní pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2).$$

Funkce g je kladná na intervalu $(0, \infty)$ a $g(0) = 0$. Bod 0 je tedy (jediným) bodem minima funkce g . Zderivujeme-li funkci g , dostaneme

$$g'(r) = e^{-r}(1 - r)$$

pro $r \in (0, \infty)$. Odtud vidíme, že funkce g je na intervalu $(0, 1)$ rostoucí a na intervalu $(1, \infty)$ klesající. Maxima tedy nabývá v bodě 1.

Z rovnosti $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ vidíme, že bodem minima funkce f je bod $[0, 0]$ a body maxima funkce f tvoří jednotkovou kružnici; jedná se tedy o body $[x, y]$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $x^2 + y^2 = 1$.